入試問題　算数Ⅱ

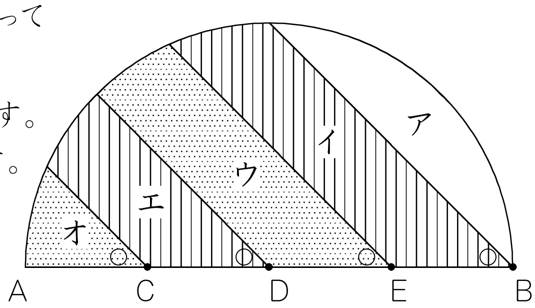
入試問題の図形問題の中から、「補助線」をどう引くか？を考える問題を、**麻布学園**、**桐光学園**、**世田谷学園**、**鴎友学園**から4問選びました。「補助線」の引き方次第（しだい）で、さっと正解を見つけられたり、逆に、あらぬ方向へいって時間を浪費（ろうひ）したりしてしまいます。

【1】　小問（1）が（2）のヒントになっていて、そのヒントからどんな補助線を引くか？という問題として、麻布学園の入試問題を解いてみましょう。

麻布学園

$\boxed{2}$　右の図のように、半径5cmの半円を、4つの直線によってア、イ、ウ、エ、オの5つの部分に分けます。ここで、図の点C、D、Eは直径ABを4等分する点です。

また、○印のついた4つの角の大きさはすべて45゜です。

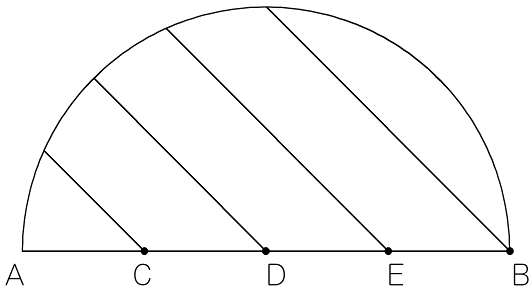


このとき、以下の問いに答えなさい。

（1）　アの面積は何cm^2ですか

（2）　イとエの面積の和からウとオの面積の和を引くと、何cm^2になりますか。

必要ならば、右の図を自由に用いてかまいません。



（1）　アの面積は、いわゆる「レンズ型」の半分だから、5年生でも容易に解けます。

5×5×０．57÷２＝７．125(cm^2)となります。

（2）　イとエの面積の和と、ウとオの面積の和を、それぞれ求めようとしても、当然求められません。また、おうぎ形をふちどったり、同じ部分を加えても差は変わらない「差一定」の考え方を使っても解けません。

そこで、「**なぜ、（1）の設問があるのか？**」と考えて、（1）のアの図を利用するために、下の図1のように、Aから45゜の補助線を引いてみると、●や▲のように、面積の等しい部分が見つかります。

すると、相似比と面積比の関係から、図1のカ・キ・ク・ケの面積比は、1:3:5:7となり、（カ＋ク）:（キ＋ケ）＝6:10となり、その差は4です。ここで、カの面積は1ですから、差の4は、２．５×１．25÷２×４＝６．25(cm^2)となります。

または、図2のように、C、D、Eから同様に補助線を引いて見ると、○や△の面積の等しい部分が見つかり、イとエの面積の和の方がウとオの面積の和より、○2個分多くなります。よって、○の正方形の対角線が２．５cmだから、○2個分の面積は、２．５×２．５÷２×２＝６．25(cm^2)となります。

図1

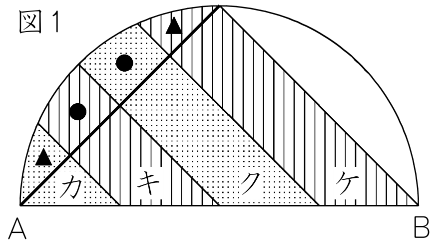
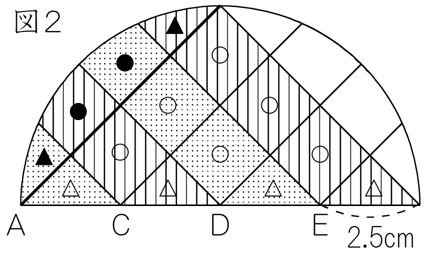


図2



＊（2）だけをいきなり問わず、（1）の小問を導入したところが、麻布らしい良問でした。

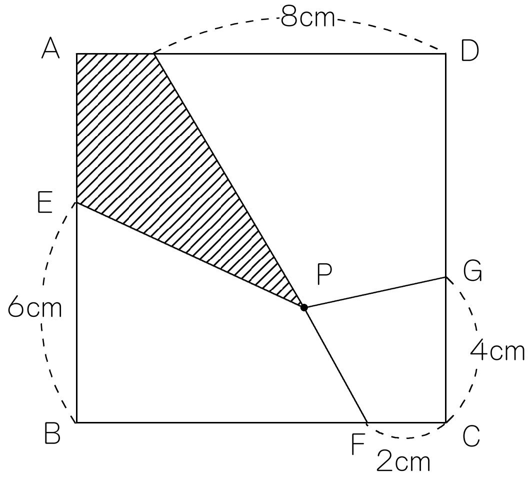
【2】　出題の狙いを考えて、自分の知っている**基本的な考え方**を使うために、**どのような補助線を引くか？**という問題として、桐光学園の問題を解いてみましょう。

この問題は、桐光学園の $\boxed{1}$ でよく見られる、いわゆる「**止め問**」となるような問題で、すぐに、出題の狙いや解法の見当がつかなければ、後回しにしてよいでしょう。

桐光学園

$\boxed{1}$

（5）　右の図は1辺が10cmの正方形ABCDで、四角形PFCGの面積が10．5cm^2のとき、斜線部分の面積は $\boxed{}$ cm^2です。



まず、右の図1の「**アとイの面積の和は長方形の面積の半分になる**」という基本的な考え方があります。図2で、アとイをそれぞれ4等分すると、ウとエの面積の和は、長方形の面積の、$\frac{1}{2} \times \frac{1}{4} = \frac{1}{8}$（倍）になります。この考え方を本問に使うことがわかれば、図3のAPとCPの2本の補助線を引くことになります。

AE＝CG＝4cmだから、カとクの面積の和は、正方形の面積の、$\frac{1}{2} \times \frac{4}{10} = \frac{1}{5}$（倍）となり、AH＝CF＝2cmだから、ケとキの面積の和は、正方形の面積の、$\frac{1}{2} \times \frac{2}{10} = \frac{1}{10}$（倍）となり、カとキとクとケの面積の和は、$10 \times 10 \times \left(\frac{1}{5} + \frac{1}{10}\right) = 30$（$cm^2$）となります。よって、斜線部分の面積は、30－10，5＝19．5（cm^2）となります。

図1

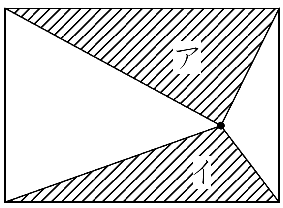


図2

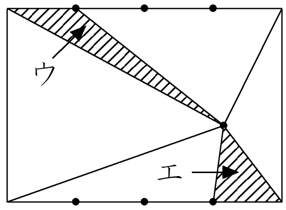
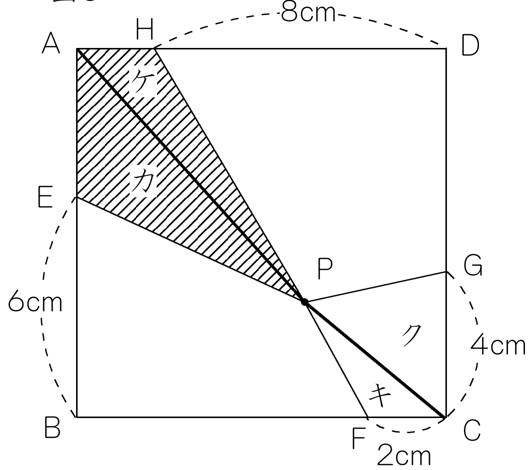


図3



【3】 おうぎ形を含んだ複合図形では、「**おうぎ形をふちどる**」ことによって、**図形の組み合わせ**を見つけるという基本的な考え方があります。この基本を使う問題として、世田谷学園の問題を解いてみましょう。

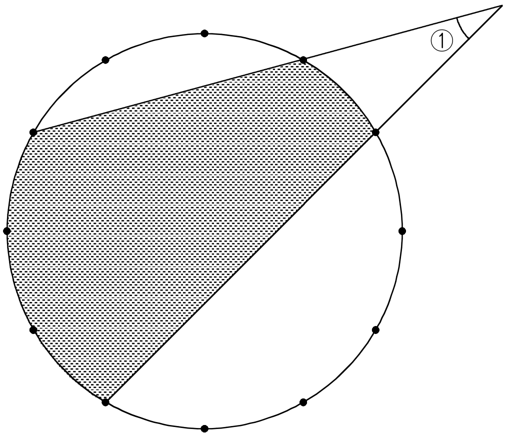
世田谷学園

$\boxed{3}$ 半径6cmの円の周を12等分し、下の図のように2本の線を引きました。

このとき、次の問いに答えなさい。

（1） 図の①の角の大きさは何度ですか。

（2） 図の色のついた部分の面積は何cm^{2}ですか。



まず、おうぎ形の中心から半径を引いて、「**おうぎ形をふちどる**」と、下の図1のように、ア、イ、ウ、エの4つの図形に分けられます。12等分されたおうぎ形の中心角は30度だから、アは中心角90°のおうぎ形、イは頂角が150°の二等辺三角形、ウは中心角が30°のおうぎ形、エは頂角が90°の直角二等辺三角形になります。

（1）「三角形の外角の定理」を応用すると、図2の、角カ＋角キ＋角ク＝角ケとなります。そこで、図1のおうぎ形アの中心角は90度、二等辺三角形イの底角は、（180－150）÷2＝15（度）、直角二等辺三角形エの底角は、（180－90）÷2＝45（度）となります。よって、①の角の大きさは、90－（45＋15）＝30（度）となります。

図1

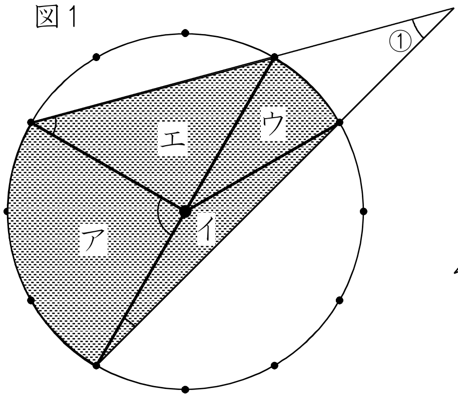
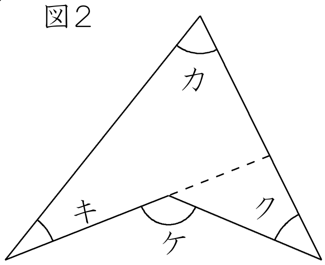


図2



（2） おうぎ形アとウの中心角の和は、90＋30＝120（度）だから、2つのおうぎ形の面積の和は、6×6×3.14×$\frac{120}{360}$＝37.68（cm^2）です。また、直角二等辺三角形エの面積は、6×6÷2＝18（cm^2）です。

二等辺三角形イ（図4の三角形ABC）で、ABを底辺としたときの、高さはCDとなります。図3の三角定規の辺の長さの関係から、CDの長さは、6÷2＝3（cm）となるので、二等辺三角形イの面積は、6×3÷2＝9（cm^2）となります。

よって、色のついた部分の面積は、37.68＋18＋9＝64.68（cm^2）となります。

図3

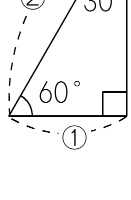
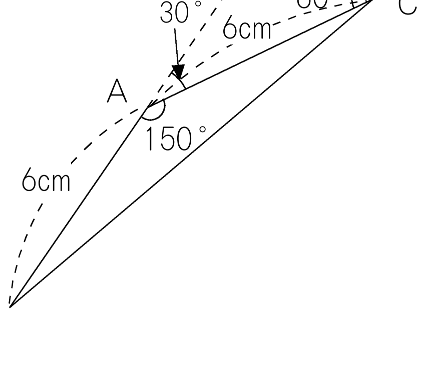


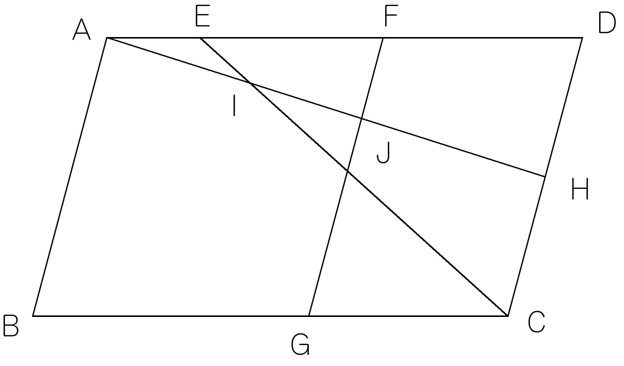
図4



【4】 鴎友学園の**定番**とされる「平行四辺形と相似に関する問題」を解いてみましょう。鴎友学園の合格を目指して勉強した受験者なら、迷わず補助線を引いて、正解したでしょう。

鴎友学園

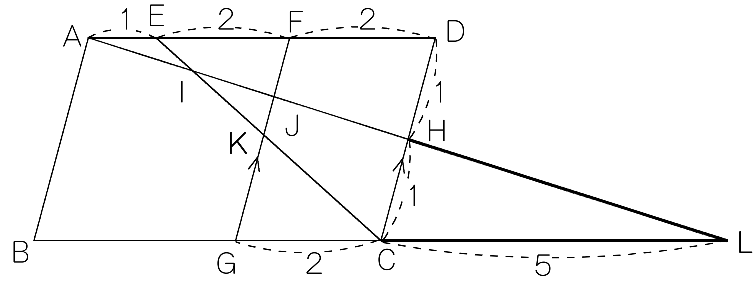
$\boxed{5}$ 図の平行四辺形ABCDは、AE:EF:FD＝1:2:2、DH:HC＝1:1です。また、FGとDCは平行です。



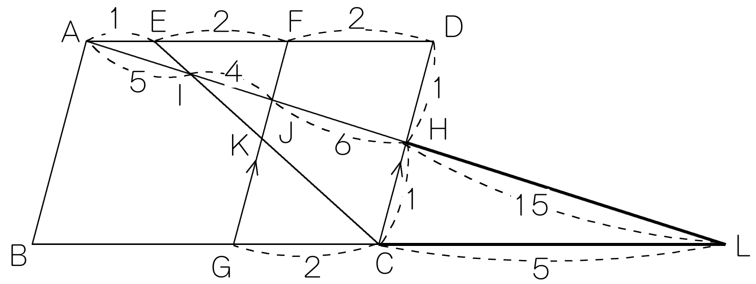
（1） AI:IJ:JHを最も簡単な整数の比で表しなさい。

（2） 四角形EFJIの面積が11cm²のとき、平行四辺形ABCDの面積を求めなさい。

まず、いわゆる「Z型の相似形」を作るために、**AHとBCを延長した補助線を引き**、その交点をLとします。問題文の辺の比の条件と、補助線を引いてできた三角形の相似比から、右の図のような辺の比がわかります。



（1） 三角形AIEと三角形LICの相似形から、AI:IL＝1:5（和は6）で、三角形AJFと三角形LJGの相似形から、AJ:JL＝3:7（和は10）となります。そこで、AI＋IL＝AJ＋JLとなり、和が等しいことに着目して「**比をそろえる**」ために、AL＝30（6と10の最小公倍数）とすると、AI:IL＝1:5＝5:25、AJ:JL＝3:7＝9:21となります。また、三角形AHDと三角形LHCの相似形から、AH:HL＝1:1＝15:15となります。これらのことから、AI:IJ:JH＝<u>5:4:6</u>となります。



（2） 平行四辺形ABCDの面積を1倍とすると、三角形AHDは$\frac{1}{4}$倍で、三角形AJFは、$\frac{1}{4}\times\frac{3}{5}\times\frac{3}{5}$＝$\frac{9}{100}$（倍）です。そこで、三角形AIEは三角形AJFの、$\frac{1}{1+2}\times\frac{5}{5+4}=\frac{5}{27}$（倍）だから、四角形EFJIは三角形AJFの、$1-\frac{5}{27}=\frac{22}{27}$（倍）となり、四角形EFJIは、平行四辺形ABCDの$\frac{9}{100}\times\frac{22}{27}=\frac{11}{150}$（倍）となります。よって、四角形EFJIの面積が11cm²だから、平行四辺形ABCDの面積は、$11\div\frac{11}{150}$＝<u>150（cm²）</u>となります。