入試問題　算数Ⅰ

入試問題から、『書いて、調べて、考える』問題を取り上げて見ました。
まず、小問の誘導が見事な麻布中の入試問題を解いてみましょう。

麻布中

5　中心に回転できる矢印が2本取り付けられた円盤(えんばん)があります。まず、この円盤の円周を7等分する位置に目盛りを振(ふ)ります。さらに、図1のように、1から7までの数字が書かれた7枚のコインを各目盛りの位置に1枚ずつ置き、2本の矢印を1と2の数字が書かれたコインの方へ向けます。

ここで、次の【操作】を考えます。

【操作】矢印が向いている目盛りの位置にある2枚のコインを入れ替(か)え、その後2本の矢印をそれぞれ2目盛り分だけ時計回りに回す。

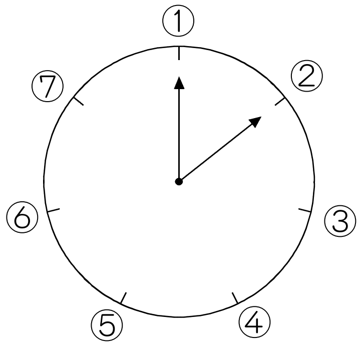


図1

図1の状態から1回【操作】を行うと図2のようになり、さらに1回【操作】を行うと図3のようになります。

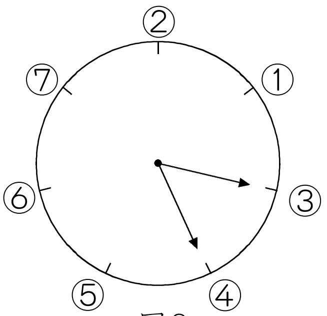


図2

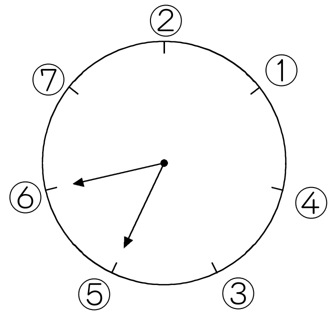
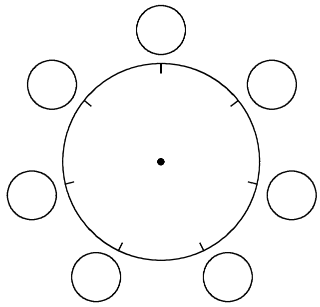


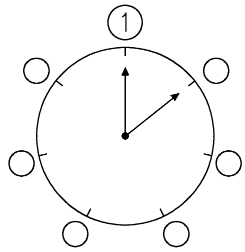
図3

この操作について、以下の問いに答えなさい。

（1）　図1の状態から7回【操作】を行うと、7枚のコインの位置と2本の矢印の向きはどうなりますか。右の図に1から7までの数字と2本の矢印をかき入れなさい。



（2）　図1の状態から何回【操作】を行うと、1の数字が書かれたコインの位置と2本の矢印の向きが図1と同じになりますか。最も少ない回数を答えなさい。ただし、【操作】は1回以上行うものとします。



（3）　図1の状態から何回【操作】を行うと、全てのコインの位置と2本の矢印の向きが図1と同じになりますか。最も少ない回数を答えなさい。ただし、【操作】は1回以上行うものとします。

次に、円盤の円周を99等分する位置に目盛りを振り直します。さらに、図4のように、1から99までの数字が書かれた99枚のコインを各目盛りの位置に1枚ずつ、1から順に時計回りに置き、2本の矢印を1と2の数字が書かれたコインの方へ向けます。

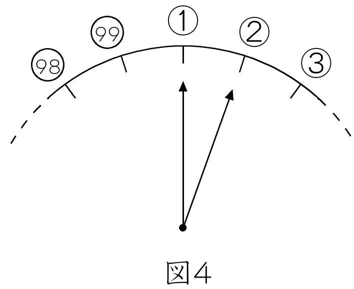
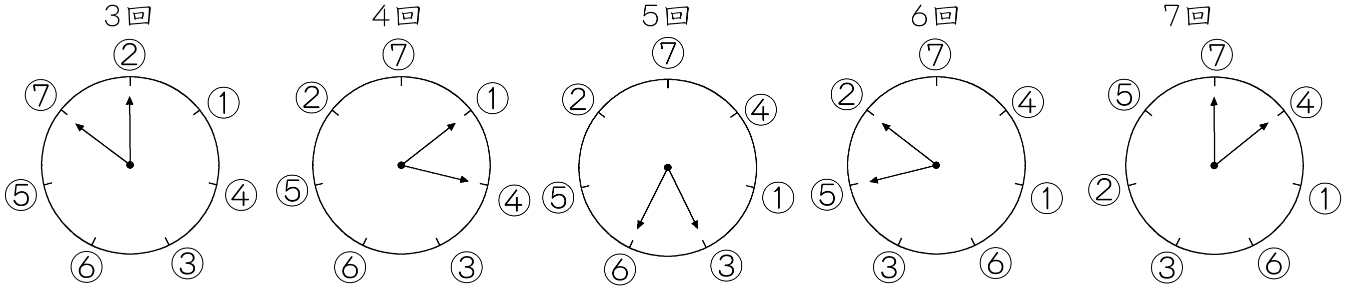


図4

（4）　図4の状態から何回【操作】を行うと、全てのコインの位置と2本の矢印の向きが図4と同じになりますか。最も少ない回数を答えなさい。ただし、【操作】は1回以上行うものとします。

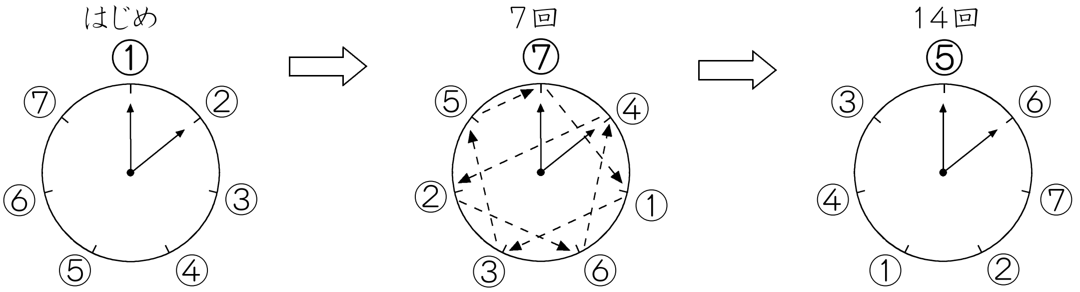
＊　本問は、(1)で地道に書き出させ、調べさせて、(2)(3)でどんな規則性や特性があるかを考えさせて、(4)につなげるという設問の見事な流れがありました。麻布中らしい良問だと思います。
＊　周期数列やグループ数列を利用して解く問題として、トランプを切ったり、あみだくじをつなげたりする問題でも同様の解法が使えます。過去にもいろいろな学校で同種の問題が出題されています。

(1)　図3で2回【操作】を行っているので、3回から7回の【操作】を書き出すと、下の図のようになります。



(2)　(1)で、なぜ7回【操作】を行わせたのかを考えます。すると、7回で2本の矢印の向きがはじめの位置にもどることがわかります。また、そのとき、コインがはじめの位置からどのように移動したかに着目します。

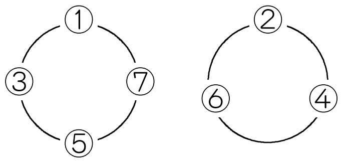
7回【操作】を行ったら、下の図のように、①がはじめの③の位置に、②がはじめの⑥の位置に、③がはじめの⑤の位置に、④がはじめの②の位置に、⑤がはじめの⑦の位置に、⑥がはじめの④の位置に、⑦がはじめの①の位置に移動しました。次の7回の【操作】でも、コインが同じような移動をすることになります。



すると、はじめの①の位置のコインの数字は、7回の【操作】ごとに、(①→)⑦→⑤→③→①→⑦→・・・と、7、5、3、1の4個の数字の周期数列になっていることがわかります。よって、①のコインと2本の矢印が図1とはじめて同じになるのは、7×4＝28回【操作】を行ったときです。

(3)　同様に、他の位置のコインの数字が、7回の【操作】ごとに、どのように変わって行くかを調べます。
はじめの②の位置のコインの数字は、(②→)④→⑥→②→④→・・・・と変わっていき、
はじめの③の位置のコインの数字は、(③→)①→⑦→⑤→③→①→・・・・と変わっていき、
はじめの④の位置のコインの数字は、(④→)②→④→⑥→②→・・・・と変わっていき、
はじめの⑤の位置のコインの数字は、(⑤→)③→①→⑦→⑤→③→・・・・と変わっていき、
はじめの⑥の位置のコインの数字は、(⑥→)②→④→⑥→②→・・・・と変わっていき、
はじめの⑦の位置のコインの数字は、(⑦→)⑤→③→①→⑦→⑤→・・・・と変わっていきます。

すると、**奇数の位置のコインは、①→⑦→⑤→③→①→・・・と4個の数字の周期数列**になっていて、
偶数の位置のコインは、②→④→⑥→②→・・・と3個の数字の周期数列になっていて、
2組のグループの周期数列になっていることがわかります。



よって、奇数のコインは4回ごとに、偶数のコインは3回ごとに、はじめに位置にもどり、2本の矢印の向きは7回ごとにはじめの位置にもどるので、全てのコインと2本の矢印の向きが図1とはじめて同じになるのは、4と3と7の最小公倍数の84回【操作】を行ったときです。

＊このように、何組かの周期数列の問題は、以前「あみだくじ」の問題で出題されていました。

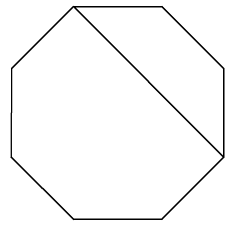
(4)　(2)(3)でわかったことを利用します。コインが99枚なら、奇数のコインは50枚だから50個の数字の周期数列になり、偶数のコインは49枚だから49個の数字の周期数列になります。また、2本の矢印の向きが図4の位置にはじめてもどるのは、99回【操作】を行ったときです。

よって、全てのコインと2本の矢印の向きが図4とはじめて同じになるための最も少ない【操作】は、50と49と99の最小公倍数の、50×49×99＝242550回となります。

正多角形に関して、**『書いて、調べて、考える』**問題として、洗足学園中第2回と浅野中を解いてみましょう。洗足学園の問題は正八角形を分割して面積比を求める問題で、4年生にも理解できる問題です。また、浅野中の問題は、正六角形に関する問題で、作図をしてから、相似比や面積比を利用する問題でした。どちらも図形問題の基本にもどって、『書いて、調べて、考える』問題でした。

洗足学園第2回

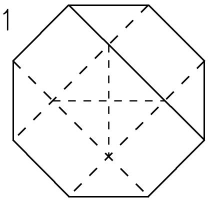
$\boxed{4}$（4）　正八角形を図のように，2つの図形に分けました。この2つの図形の大きい方と小さい方の面積の比を最も簡単な整数の比で答えなさい。



本問は一見すると、シンプルな図で条件も少なく、どこに着眼点を置くか、どのような考え方を使って解くか、その第一歩がわかりにくい問題です。

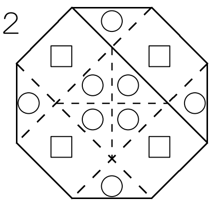
そこで、**「図形問題では補助線が命！」**という基本にもどって、いろいろな補助線を書き入れて試行錯誤してみます。すると、右の図1のような点線の補助線を引き、正八角形をいくつかの合同な図形に分割すると、解法が見えてきます。

図1



右の図2のように、合同な直角二等辺三角形に○を、合同な長方形に□を書き入れると、小さい方の面積は○2個と□1個に対し、大きい方の面積は○6個と□3個になるので、大きい方は小さい方より○も□も3倍となっているので、その面積比は、3：1になります。

図2



＊　**試行錯誤の結果、図1の補助線が引ければ、4年生にも理解できる問題でした。**

浅野中

$\boxed{5}$　［図6］のような一辺の長さが3cmの正六角形ABCDEFがあります。点Pは辺AB上を動くことができ、点Qは辺CD上を動くことができます。PQを2：1に分ける点をRとするとき、次の問いに答えなさい。

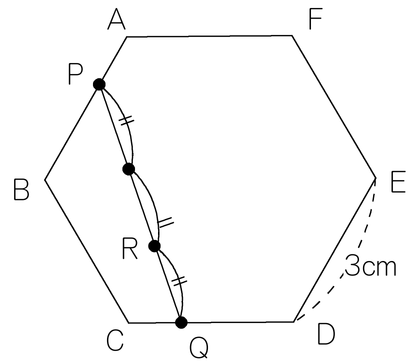
（1）　点Pが点Aに止まっていて、点Qが辺CD上を点Cから点Dまで動くとき、点Rの動く線の長さを求めなさい。

（2）　点Qが点Cに止まっていて、点Pが辺AB上を点Aから点Bまで動くとき、点Rの動く線の長さを求めなさい。

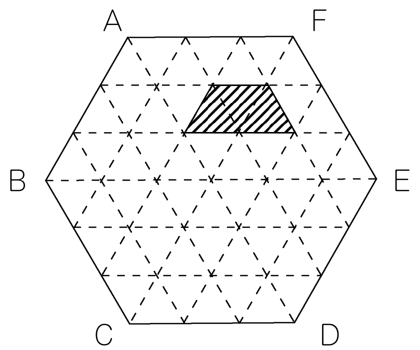
（3）　点Pが辺AB上を、点Qが辺CD上をそれぞれ自由に動くとき、点Rの動くことができる範囲（はんい）を、［図7］の例のように解答用紙の図に斜線（しゃせん）で示しなさい。

（4）　（3）で求めた範囲の面積は、正六角形ABCDEFの面積の何倍になりますか。

（5）　点Rが（3）で求めた範囲を動くとき、三角形EFRの面積が最も小さくなるのは、三角形EFRの面積が、正六角形ABCDEFの面積の何倍になるときですか。



［図6］



［図7］

（1）　点Pが点Aに止まっていて、点Qが点Cから点Dまで動くとき、点Rが動く線は、下の図1のRR’のようになります。三角形ACDと三角形ARR’の相似比は3：2だから、点Rの動く線の長さは、$3\times\frac{2}{3}=$ 2(cm) となります。

（2）　点Qが点Cに止まっていて、点Pが点Aから点Bまで動くとき、点Rが動く線は、下の図2のRR’のようになります。三角形ABCと三角形RR’Cの相似比は3：1だから、点Rの動く線の長さは、$3\times\frac{1}{3}=$ 1(cm) となります。

（3）　点Pが点Aに止まっていて、点Qが点Cから点Dまで動くとき、点Rは、図3の点イから点アまで動き、
点Qが点Cに止まっていて、点Pが点Aから点Bまで動くとき、点Rは、図3の点イから点ウまで動き、
点Pが点Bに止まっていて、点Qが点Cから点Dまで動くとき、点Rは、図3の点ウから点エまで動き、
点Qが点Dに止まっていて、点Pが点Aから点Bまで動くとき、点Rは、図3の点アから点エまで動きます。
よって、点Rの動くことのできる範囲は、下の図3の斜線部分のようになります。

（4）　正六角形ABCDEFの面積は、一辺が1cmの正三角形の面積、9×6＝54(個)分です。(3)の斜線部分は、一辺が1cmの正三角形4個分なので、(3)の斜線部分の面積は、正六角形ABCDEFの面積の、$4\div54=\frac{2}{27}$(倍)になります。

（5）　三角形EFRの底辺を辺EFとします。すると、三角形EFRの面積が最も小さくなるのは、高さが最も小さくなるときで、それは点Rが下の図4の点アの位置にくるときです。また、辺ADと辺EFは平行だから、下の図5のように、三角形EFRは正三角形EFSに等積変形できます。よって、正三角形EFSの面積は正六角形ABCDEFの面積の$\frac{1}{6}$倍だから、三角形EFRの面積も正六角形ABCDEFの面積の$\frac{1}{6}$倍になります。

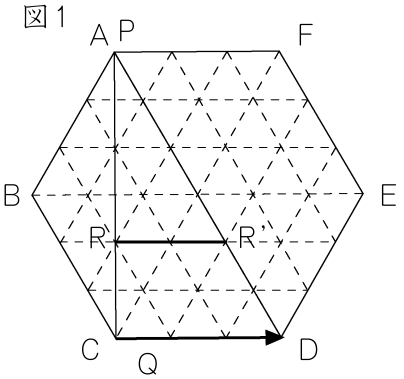
図1


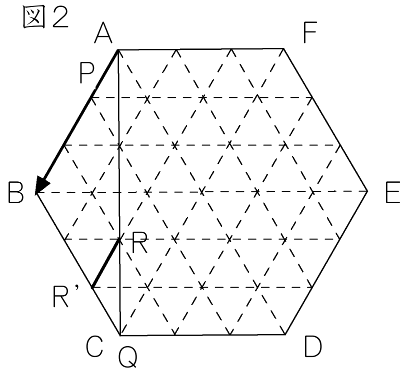
図2


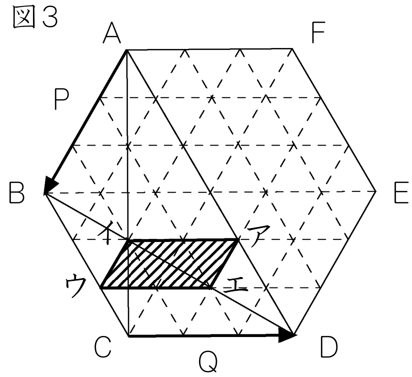
図3


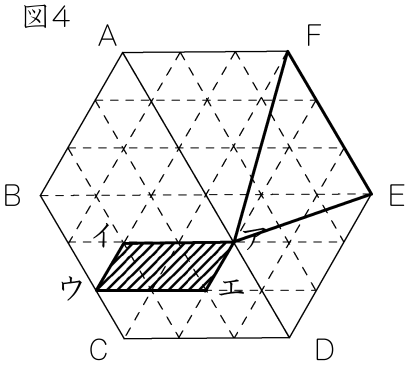
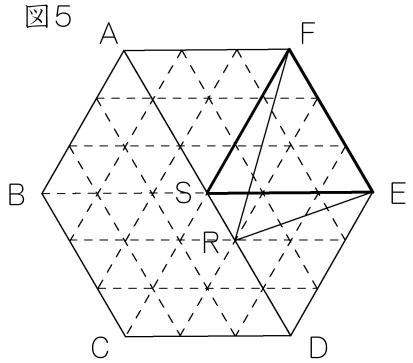
図4


図5


＊　本問は浅野中の最後の問題でしたが、『書いて、調べて、考える』と容易に解ける問題でした。浅野中を合格するためには、正解しなければならない問題でした。